

(Cours de Gourdon – Exemples itou).

$n \in \mathbb{N}^*$, E Banach, Ω ouvert de $\mathbb{R} \times E^n$.

Soit une **équation différentielle d'ordre n**

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*), \text{ où } F: \Omega \rightarrow E,$$

et où $\varphi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, n fois dérivable, est dite **solution** de $(*)$

ssi pour tout $t \in I$, $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega$,

$$\text{et } \forall t \in I, F(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) = \varphi^{(n)}(t).$$

L'équation $(*)$ peut **se ramener à une équation différentielle d'ordre 1**, en posant:

$$\phi: I \rightarrow E^n \quad t \mapsto (\varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

$$G: \Omega \rightarrow E^n; \quad (t, y) = (t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, F(t, y))$$

Alors: φ solution de $(*) \Leftrightarrow \phi$ solution de $\phi' = G(t, \phi)$.

D'où l'importance de traiter les équations d'ordre 1 ici.

I. Problème de Cauchy.

On appelle **problème de Cauchy** en t_0 la recherche d'une solution d'une équation différentielle satisfaisant des conditions initiales données en t_0 .

On dit qu'il y a **unicité au problème de Cauchy** $(*)$ en $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ s'il existe au moins une solution à ce pb et si pour toutes solutions $\varphi: I \rightarrow E$ et $\psi: J \rightarrow E$, les fonctions φ et ψ coïncident sur $I \cap J$.

Def 1: On dit qu'une application F d'un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est **localement lipschitzienne en la seconde variable** si pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe un voisinage V de (t_0, x_0) , et $k > 0$ tels que: $\forall (t, x) \in V, \forall (t, x') \in V$,

$$\|F(t, x) - F(t, x')\| \leq k \|x - x'\|.$$

Th 1: Cauchy-Lipschitz. Soit $F: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et **localement lipschitzienne en la seconde variable**.

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une intervalle I voisinage de t_0 dans $\mathbb{R}$ et une application $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ solution de $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

De plus, il y a **unicité** pour le pb. de Cauchy de cette équation diff en (t_0, x_0) .

Si F est seulement continue (th. de Péano), on garde l'existence mais on perd l'unicité.

Si F est C^1 , alors est loc lipsch. en la 2nde vble, et le th. de Cauchy-Lipschitz s'applique.

Cor: Soit $F: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.

Alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de l'équation diff $y' = F(t, y)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. Cette solution est définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

On va maintenant donner des méthodes pratiques de résolution de certains types d'équations différentielles.

II. Equations incomplètes.

Def 2: On appelle ainsi les équations diff dans lesquelles x ou y ne figure pas.

A. Equations de la forme $F(x, y') = 0$.

On note $\Gamma = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 / F(X, Y) = 0\}$.

Supposons connu un paramétrage de Γ de la forme $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$, où φ est un C^1 -difféomorphisme, et ψ est continue. L'équation $F(x, y') = 0$ s'écrit aussi:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases}$$

donc $dy = \psi(t) dx = \psi(t) \varphi'(t) dt$, et le graphe des solutions peut être paramétré par:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int_{t_0}^t \psi(u) \varphi'(u) du + y_0 \end{cases}$$

B. Equations de la forme $F(y, y') = 0$.

On suppose connu un paramétrage de Γ , avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations.

Pour résoudre $F(y, y') = 0$, on écrit:

$$\begin{cases} y = \varphi(t) \\ y' = \psi(t) \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} dy = \psi(t) dx \\ \varphi'(t) dt = \psi(t) dx \end{cases}$$

$$\text{d'où: } dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

Puis on intègre, ce qui donne un paramétrage en t du graphe des solutions.

Remarque: Si Ψ s'annule en un point t_0 , la fonction $t \mapsto \varphi(t_0)$ est solution, et peut se raccorder à des solutions dont la dérivée s'annule en t_0 .

III. Equations homogènes.

Def 3: On appelle ainsi les équations diff qui peuvent s'exprimer en fonction de y' et de $\frac{y}{x}$.

A. Equations homogènes résolues: $y' = f(y/x)$.

On pose $t = \frac{y}{x}$, donc $y = tx$ et $f(t) dx = dy = xdt + tdx$.

On se ramène donc à $[f(t) - t] dx = xdt$, que l'on sait intégrer.

Remarque: S'il existe t_0 tel que $f(t_0) = t_0$, la fonction $y = t_0 x$ est solution.

Exemple 1: (Gou ex. 1 p.366) $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ (1)

B. Equat^{os} homogènes non résolues: $F(y/x, y') = 0$.

On suppose connu un paramétrage $t \mapsto (u(t), v(t))$ de $\Gamma = \{(U, V) / F(U, V) = 0\}$, où u est de classe C^1 et v est continue.

On écrit $\frac{y}{x} = u(t)$ et $y' = v(t)$, donc:

$$dy = v(t) dx = u'(t) x dt + u(t) dx, \text{ d'où :}$$

$$[v(t) - u(t)] dx = xu'(t) dt.$$

- Sur un intervalle où $u-v$ ne s'annule pas, on écrit:

$$\frac{dx}{x} = \frac{u'(t)}{v(t) - u(t)} dt, \text{ puis on intègre.}$$

- S'il existe t_0 tel que $u(t_0) = v(t_0)$, alors:

$$x \mapsto u(t_0) x \text{ est solution.}$$

IV. Etude d'équations particulières.**A. Equations de Bernouilli.**

Du type $y' = a(t)y + b(t)y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$,

où a et b fonctions continues de $J \text{ int.} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\alpha = 0$ ou $1 \Rightarrow$ équ^o linéaire, que l'on sait résoudre.

On cherche des solutions qui ne s'annulent pas (si $\alpha \notin \mathbb{N}$, on cherche les solutions > 0). L'équation peut s'écrire:

$$\frac{y'}{y^\alpha} = a(t) \frac{1}{y^{\alpha-1}} + b(t), \text{ ou encore :}$$

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = a(t)z + b(t), \text{ où } z = y^{1-\alpha}$$

c'est une équation linéaire d'ordre 1, que l'on sait résoudre.

Remarque: Si $\alpha > 0$, la fonction nulle est solution.

Si de plus $\alpha \geq 1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre qu'aucune solution ne s'annule.

Si $0 < \alpha < 1$, on peut faire des raccords de classe C^1 avec la solution nulle.

B. Equation de Riccati. (Demailly p.165)

Du type $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$ (R)

où a, b, c continues de $J \text{ int.} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Si on en connaît une solution particulière φ_0 , on sait la résoudre: on pose $y = \varphi_0 + z$, et il vient:

$z' = [2a(t)\varphi_0(t) + b(t)]z + a(t)z^2$ (R'), qui est une équation de Bernouilli.

Le th. de Cauchy-Lipschitz montre qu'en dehors de la solution nulle, aucune solution de (R') ne s'annule.

On peut donc poser $z = 1/u$, et on se ramène à une équ^a diff linéaire du premier ordre.

Remarque: ici, il n'y a pas de raccord de solutions à faire.

Exemple2: (Demailly p.165)

$$(1-x^3)y' + x^2y + y^2 - 2x = 0 \quad (2)$$

C. Equation de Lagrange.

Du type $y = a(y')t + b(y')$,

où a et b sont C^1 sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

- On cherche d'abord les solutions affines, qui sont de la forme $t \mapsto mt + b(m)$, avec $a(m) = m$.

- On cherche ensuite les solutions C^2 telles que y'' ne s'annule pas. On en paramètre le graphe par la variable $p=y'$. En dérivant par rapport à t l'égalité $y = a(p)t + b(p)$, il vient:

$$[p - a(p)] \frac{dt}{dp} = a'(p)t + b'(p), \text{ équ^a diff linéaire}$$

résolue du premier ordre tant que y'' ne s'annule pas.

On obtient en la résolvant la fonction $t \mapsto p(t)$, et l'équation initiale donne $y(p)$.

Un paramétrage du graphe des solutions C^2 dont la dérivée seconde ne s'annule pas est alors :

$$p \mapsto (t(p), a(p)t(p) + b(p)).$$

Reste à effectuer les raccords de classe C^1 entre ces dernières solutions et les solutions affines.

D. Equation de Clairaut.

Du type $y = y't + b(y')$

où b est C^1 sur un int. de $\mathbb{R}$.

C'est un cas de Lagrange où $a(m) = m$ pour tout m .

Les solutions affines sont de la forme $t \mapsto mt + b(m)$, $m \in I$

Les solutions C^2 dont la dérivée seconde ne s'annule pas se paramètrent sous la forme

$$p \mapsto (t(p), y(t(p))), \text{ où } t(p) = -b'(p), \text{ et } y(t(p)) = -pb'(p) + b(p).$$

Remarque: Les tangentes à l'arc ainsi paramétré sont aussi solutions de l'équ^a diff (l'arc est l'enveloppe des solutions affines).

On raccorde les deux types de solutions pour obtenir toutes les solutions.

Exemple 3: (Gou ex.3 p.367) $y = ty' - \frac{y'^2}{4}$

V. Notes.

(1) $\exists$ d'autres exemples dans Demailly p.173, et p.168.

(2) $\exists$ un autre exemple dans Sorosina p.307, et encore un dans Gourdon, ex. 2 p 367.